

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 10

Operatory sprzężone

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

H – ustalona przestrzeń Hilberta.

Tw. (Riesz-Fréchet) Odwzorowanie $f : H \rightarrow \mathbb{F}$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym $\iff$ istnieje $y \in H$ taki, że

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ dla każdego } x \in H,$$

a ponadto, wtedy $\|f\| = \|y\|$. Czyli $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ jest izometrycznym izomorfizmem antyliniowym: $H \stackrel{\text{anty}}{\cong} H^*$.

Dowód: Jeśli $f(x) := \langle x, y \rangle$, $x \in H$, dla pewnego $y \in H$, to $f \in H^*$ oraz $\|f\| = \|y\|$ (patrz dowód Stwierdzenia z Wykładu 7). Zatem $H \ni y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ izometria, która jest antyliniowa, bo iloczyn skalarny jest antyliniowy ze względu na drugą współrzędną.

Niech teraz $f \in H^*$ dowolny. Możemy założyć, że $f \neq 0$, bo jeśli $f \equiv 0$, to $f(x) = \langle x, 0 \rangle$ dla $x \in H$. Wtedy $M := \ker f \neq H$ i stąd $\{0\} \neq M^\perp \subseteq H$. Co więcej twierdzimy, że $\dim(M^\perp) = 1$.

Rzeczywiście,

jeśli $y_1, y_2 \in M^\perp \setminus \{0\}$, to $f(y_1), f(y_2) \neq 0$ i dla $\lambda := \frac{f(y_2)}{f(y_1)} \in \mathbb{F}$

$$f(\lambda y_1 - y_2) = \lambda f(y_1) - f(y_2) = f(y_2) - f(y_2) = 0.$$

Czyli $\lambda y_1 - y_2 \in \ker f = M$. Ale z drugiej strony $\lambda y_1 - y_2 \in M^\perp$.
Zatem $y_2 = \lambda y_1$, bo $M \cap M^\perp = \{0\}$. Stąd $\dim(M^\perp) = 1$.

Weźmy dowolny $y_0 \in M^\perp$ taki, że $\|y_0\| = 1$. Wtedy dla $x \in H$
mamy $P_{M^\perp}x = \langle x, y_0 \rangle y_0$ (bo $M^\perp = \{\lambda y_0 : \lambda \in \mathbb{F}\}$) i stąd

$$\begin{aligned} f(x) &= f(P_Mx + P_{M^\perp}x) = f(P_Mx) + f(P_{M^\perp}x) = 0 + f(\langle x, y_0 \rangle y_0) \\ &= \langle x, y_0 \rangle f(y_0) = \langle x, \overline{f(y_0)} y_0 \rangle. \end{aligned}$$

Czyli kładąc $y := \overline{f(y_0)} y_0$ mamy $f(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$. ■

Wn. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą. Każdy ograniczony
funkcjonał liniowy $f : L^2(\mu) \rightarrow \mathbb{F}$ jest postaci

$$f(x) = \int_\Omega x(t)y(t) d\mu, \quad x \in L^2(\mu),$$

gdzie $y \in L^2(\mu)$. Ponadto wtedy $\|f\| = \|y\|_2 = \left(\int_\Omega |y(t)|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$.

Tw. Jeśli $T : H \rightarrow K$ jest ograniczonym operatorem liniowym między dwoma przestrzeniami Hilberta H i K , to istnieje dokładnie jedna funkcja $T^* : K \rightarrow H$ taka, że

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{dla } x \in H, y \in K. \quad (1)$$

Ponadto, $T^* \in B(K, H)$, $\|T^*\| = \|T\|$ oraz $(T^*)^* = T$.

Def. T^* nazywamy **operatorem sprzężonym** do $T \in B(H, K)$

Dowód: Dla ustalonego $y \in K$ funkcja $f(x) := \langle Tx, y \rangle$, $x \in H$, jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na H . W szczególności,

$$|f(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|,$$

skąd $\|f\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$. Zatem na mocy **Tw.** (Riesz-Fréchet) istnieje dokładnie jeden wektor w H , oznaczmy go przez T^*y , taki, że $f(x) = \langle x, T^*y \rangle$, $x \in H$, czyli $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ dla $x \in H$. Ponadto wtedy $\|T^*y\| = \|f\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$. To dowodzi istnienia i jednoznaczności funkcji $T^* : K \rightarrow H$ spełniającej (1).

T^* jest operatorem liniowym, bo dla $y_1, y_2 \in K$, $\lambda \in \mathbb{F}$ oraz $x \in H$

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\lambda y_1 + y_2) \rangle &= \langle Tx, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle Tx, y_1 \rangle + \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle x, T^* y_1 \rangle + \langle x, T^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \lambda T^* y_1 + T^* y_2 \rangle.\end{aligned}$$

Stąd $T^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda T^* y_1 + T^* y_2$. Z otrzymanej wcześniej nierówności $\|T^* y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$ wynika, że $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Żeby wykazać nierówność przeciwną zauważmy, że sytuacja jest symetryczna i możemy zamienić T i T^* rolami. Dokładniej,

$$\langle T^* x, y \rangle = \overline{\langle y, T^* x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle,$$

skąd $(T^*)^* = T$. W szczególności $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$. ■

Prz. Jeśli $H = \mathbb{F}^n$ i $K = \mathbb{F}^m$, to dla $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^{m, n} \in B(H, K)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{🏠}} A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Stw. (Własności sprzężenia) $T, S \in B(H, K)$, $R \in B(K, L)$

- a inwolucja: $(T^*)^* = T$
- b antyliniowość: $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$
- c antymultiplikatywność: $(RT)^* = T^* R^*$
- d C^* -równość: $\|T\|^2 = \|T^* T\|$.

Dowód: Własność (a) wykazaliśmy w poprzednim Twierdzeniu.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \langle (\alpha T + \beta S)x, y \rangle &= \alpha \langle Tx, y \rangle + \beta \langle Sx, y \rangle = \alpha \langle x, T^* y \rangle + \beta \langle x, S^* y \rangle \\ &= \langle x, \bar{\alpha} T^* \rangle + \langle x, \bar{\beta} S^* y \rangle = \langle x, (\bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*) y \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \langle RTx, y \rangle = \langle Tx, R^* y \rangle = \langle x, T^* R^* y \rangle.$$

(d) Zauważmy, że $\|T^* T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\|$ (bo norma operatorowa jest submultiplikatywna) i skoro $*$ jest izometrią, to $\|T^* T\| \leq \|T\|^2$. Z drugiej strony dla $h \in H$ mamy

$$\|Th\|^2 = \langle Th, Th \rangle = \langle h, T^* Th \rangle \stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|h\| \|T^* Th\| \leq \|T^* T\| \|h\|^2$$

Stąd $\|T\|^2 \leq \|T^* T\|$.

Lem. $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ dla każdego $x \in H \implies y = z$. 

Stw. Dla operatora liniowego $U : H \rightarrow K$ NWSR:

- ❶ U jest izometrią,
- ❷ U zachowuje iloczyn skalarny,
- ❸ $U^* U = 1$.

Dowód: (1) $\implies$ (2). Jeśli U jest izometrią, to na mocy wzorów polaryzacyjnych dla dowolnych $x, y \in H$ oraz np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\langle Ux, Uy \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|Ux + i^k Uy\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|U(x + i^k y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

(2) $\implies$ (3). Dla dowolnego $y \in H$ mamy

$$\forall_{x \in H} \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \implies \forall_{x \in H} \langle x, U^* Uy \rangle = \langle x, y \rangle \xrightarrow{\text{Lem}} U^* Uy = y$$

(3) $\implies$ (1). Dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^* Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2. \quad \blacksquare$$

Wn. U jest operatorem **unitarnym** (odwracalną izometrią) wtedy i tylko wtedy, gdy $U^*U = UU^* = 1$.

Dowód: Jeśli $U^*U = UU^* = 1$, to U odwracalna izometria, gdzie $U^* = U^{-1}$, a więc U unitarny. Jeśli U unitarny, to $U^*U = 1$, bo U jest izometrią, i stąd $U^{-1} = 1U^{-1} = U^*UU^{-1} = U^*$, czyli $U^*U = UU^* = 1$. ■

Charakteryzacje operatorów za pomocą operacji algebraicznych

Relacje	Nazwa operatora
$T = T^*$	samosprężony
$TT^* = T^*T$	normalny
$P^2 = P, P = P^*$	rzut ortogonalny
$U^*U = 1$	izometria
$U^*U = UU^* = 1$	unitarny

Uw. Operator unitarny = „normalna izometria”.

Prz. (klasyczny jednostronny operator przesunięcia)

Operator $U : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dany wzorem

$$U(x(1), x(2), x(3), \dots) := (0, x(1), x(2), \dots)$$

jest izometrią U , ale nie jest operatorem unitarnym, bo $UH = \{x \in \ell^2 : x(1) = 0\} \neq H$. Ponadto

$$U^*(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(2), x(3), \dots),$$

bo

$$\langle Ux, y \rangle = \langle (0, x(1), x(2), x(3), \dots), (y(1), y(2), y(3), \dots) \rangle$$

$$= 0 \cdot \overline{y(1)} + x(1)\overline{y(2)} + x(2)\overline{y(3)} + \dots$$

$$= \langle (x(1), x(2), x(3), \dots), (y(2), y(3), \dots) \rangle = \langle x, U^*y \rangle.$$

W szczególności, $\ker U^* = \{x \in \ell^2 : x = (x(1), 0, 0, \dots)\} \neq \{0\}$ i

$$U^*U = 1, \quad UU^* = P_{UH} = 1 - P_{\ker U^*} \neq 1.$$

Uw. $UU^* = P_{UH} = 1 - P_{\ker U^*}$ dla dowolnej izometrii U



Prz. (operatory mnożenia) Niech $H = L^2(\mu)$ dla przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) . Dla każdego $a \in L^\infty(\mu)$ operator mnożenia

$$(M_a x)(t) = a(t)x(t), \quad x \in L^2(\mu), \quad t \in \Omega,$$

jest ograniczony oraz $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ (**Wykład 4**). Zauważmy, że dla $a, b \in L^\infty(\mu)$ mamy

$$(M_a)^* = M_{\bar{a}}, \quad M_a M_b = M_{ab}.$$

W szczególności **operatory mnożenia są normalne**

$$M_a^* M_a = M_{\bar{a}a} = M_{|a|^2} = M_{a\bar{a}} = M_a M_a^*.$$

Wyżej wymienione własności dla operatora $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ zależą tylko od obrazu funkcji $a : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Mianowicie

M_a samosprężony $\iff a$ funkcja rzeczywista μ -pw.



M_a rzut ortogonalny $\iff a$ funkcja charakterystyczna μ -pw.

M_a unitarny $\iff a$ przyjmuje wartości w kole jednostkowym μ -pw.